Soluciones de algunos ejercicios del Capítulo 1

Ejercicio 1 Se quiere amortizar una deuda de 10 millones de pesetas el día 31 de diciembre de 2005. Esta deuda ha sido contraída el día 1 de enero de 2000, y se incrementa cada trimestre al 6 por 100 anual. Para amortizarla se quiere pagar una cantidad fija el último día de cada mes, empezando el 31 de enero de 2000 y terminando el 31 de diciembre de 2005. Estas cantidades producen un interés anual del 3 por 100, que se acumula mensualmente. ¿Qué cantidad hay que abonar cada mes?
Solución. Como la deuda se incrementa a un interés compuesto (expresado en tanto por uno) del $0,06/4$ cada trimestre, el 31 de diciembre de 2005 la deuda más los intereses será igual a:

$$10^7\left(1+\frac{0,06}{4}\right)^{24}$$

Llamemos P a la mensualidad que tendremos que pagar al final de cada mes. Dichas mensualidades se capitalizan a interés compuesto del $0,03/12$ cada mes. La primera mensualidad permanece un total de 71 meses y la última, al pagarse el último día del mes no genera ningún interés. La cantidad total que tendremos el 31 de diciembre de 2005 será igual a:

$$P\left[\left(1+\frac{0,03}{12}\right)^{71}+\left(1+\frac{0,03}{12}\right)^{70}+\cdots+\left(1+\frac{0,03}{12}\right)+1\right]=P\left[\left(1+\frac{0,03}{12}\right)^{72}-1\right]\frac{12}{0,03}$$

En consecuencia, deberá ser:

$$P\left[\left(1+\frac{0,03}{12}\right)^{72}-1\right]\frac{12}{0,03}=10^7\left(1+\frac{0,06}{4}\right)^{24}$$

Usando una calculadora se obtiene: $P=181{,}457$ donde hemos redondeado por exceso.
Teniendo en cuenta la aproximación para n grande $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n \approxeq \mathrm{e}^r$, podemos también hacer el cálculo anterior de la siguiente forma:

$$\left(1+\frac{0,03}{12}\right)^{72}=\left(1+\frac{1}{400}\right)^{72}=\left[\left(1+\frac{1}{400}\right)^{400}\right]^{72/400}\approxeq \mathrm{e}^{72/400}$$

$$\left(1+\frac{0,06}{4}\right)^{24}=\left(1+\frac{3}{200}\right)^{24}=\left[\left(1+\frac{3}{200}\right)^{200}\right]^{24/200}\approxeq \mathrm{e}^{72/200}$$

En consecuencia:

$$P\approxeq 10^5\frac{\mathrm{e}^{72/200}}{4(\mathrm{e}^{72/400}-1)}=181{,}695$$

donde hemos redondeado por exceso.

Ejercicio 2 Pruébense las igualdades

(a) $\arccos x + \operatorname{arc\,sen} x = \dfrac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1,1]$

(b) $\tan(\operatorname{arc\,sen} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \sec(\operatorname{arc\,sen} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,1[$

Solución.
(a) Puede comprobarse esta igualdad de muchas formas. Por ejemplo, si despejamos, podemos escribir la igualdad de la forma $\operatorname{arc\,sen} x = \pi/2 - \arccos x$. Puesto que $-\pi/2 \leqslant \pi/2 - \arccos x \leqslant \pi/2$ *y en el intervalo* $[-\pi/2, \pi/2]$ *la función seno es inyectiva*, la igualdad anterior es equivalente a la siguiente: $x = \operatorname{sen}(\pi/2 - \arccos x)$ la cual es efectivamente cierta porque, para todo $x \in [-1,1]$ es:

$$\operatorname{sen}(\pi/2 - \arccos x) = \operatorname{sen}(\pi/2)\cos(\arccos x) - \cos(\pi/2)\operatorname{sen}(\arccos x) = x$$

(b) Para todo $x \in]-1,1[$ es:

$$\tan(\operatorname{arc\,sen} x) = \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x)}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)} = \frac{x}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)}$$

Ahora como $\cos^2(\operatorname{arc\,sen} x) = 1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen} x) = 1 - x^2$, *y además* $\cos(\operatorname{arc\,sen} x) > 0$, se sigue que $\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1-x^2}$ lo que prueba la igualdad pedida.
Análogamente, se tiene que:

$$\sec(\operatorname{arc\,sen} x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)} = \text{por lo antes visto} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ejercicio 3 Pruébese por inducción la igualdad:

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}\,(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx) = \operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x$$

Solución. La igualdad es evidentemente cierta para $n = 1$. Supongamos que es cierta para un número natural n y probemos que entonces lo es también para $n+1$. Tenemos:

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}\,(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx + \operatorname{sen}(n+1)x) = \operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}(n+1)x$$

En consecuencia, todo se reduce a probar que:

$$\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}(n+1)x = \operatorname{sen}\frac{(n+1)x}{2}\operatorname{sen}\frac{n+2}{2}x$$

Usando que $\operatorname{sen}(2a) = 2\operatorname{sen} a\cos a$ y que $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen}\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$, tenemos:

$$\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}(n+1)x = \operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\left[2\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x\cos\frac{n+1}{2}x\right] =$$

$$= \operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x\left[\operatorname{sen}\frac{nx}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{n+1}{2}x\right] = \operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x\left[\operatorname{sen}\frac{nx}{2} + \operatorname{sen}\frac{n+2}{2}x + \operatorname{sen}\frac{-nx}{2}\right] =$$

$$= \operatorname{sen}\frac{(n+1)x}{2}\operatorname{sen}\frac{n+2}{2}x$$

como queríamos probar.

Ejercicio 4. Estúdiese la continuidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=E(x^2)$ (parte entera de x^2) para todo $x\in\mathbb{R}$.
Solución. Claramente $f=E\circ\varphi$ donde $\varphi(x)=x^2$. Puesto que φ es continua en todo punto y la función parte entera es continua en $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, deducimos por el teorema de composición de funciones continuas, que f es continua en todo punto $a\in\mathbb{R}$ tal que $\varphi(a)=a^2\notin\mathbb{Z}$. Es decir, f es continua en $\mathbb{R}\setminus B$ donde $B=\{\sqrt{n}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{-\sqrt{n}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$. Los puntos de B requieren un estudio particular pues, *a priori*, no podemos asegurar que f sea discontinua en ellos.
Empecemos estudiando la posible continuidad de f en 0. Es claro que para $-1<x<1$ tenemos que $0\leqslant x^2<1$ por lo que $f(x)=0$ para todo $x\in]-1,1[$. Es decir, la función $f_{|]-1,1[}$ (*restricción de f al intervalo* $]-1,1[$) *es la función constante igual a* 0 y por tanto $f_{|]-1,1[}$ *es continua*. Como el intervalo $]-1,1[$ *es abierto* deducimos, *por el teorema de localización* que f es continua en $]-1,1[$ y, en particular, *f es continua en* 0.
Consideremos ahora un punto de la forma $\sqrt{q}$ donde $q\in\mathbb{N}$ (fijo en lo que sigue). Para todo $x\in]\sqrt{q-1},\sqrt{q}[$ se tiene que $q-1<x^2<q$ por lo que $f(x)=q-1$. Cualquiera sea $\delta>0$, hay puntos

$$x\in]\sqrt{q}-\delta,\sqrt{q}+\delta[\cap]\sqrt{q-1},\sqrt{q}[$$

para los que $|f(\sqrt{q})-f(x)|=|q-(q-1)|=1$, por lo que tomando $\varepsilon_o<1$ deducimos que f no es continua en $\sqrt{q}$.
De forma análoga se prueba que f es discontinua en los puntos de la forma $-\sqrt{q}$ donde $q\in\mathbb{N}$.

Ejercicio 5. Probar que si f es continua en a entonces también lo es $|f|$. Dar un ejemplo de función discontinua cuyo valor absoluto es continua.
Solución. Todo lo que se necesita es la desigualdad $\big||u|-|v|\big|\leqslant|u-v|$. En nuestro caso tenemos:

$$\big||f(x)|-|f(a)|\big|\leqslant|f(x)-f(a)|$$

Supuesto que f es continua en a, dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que si $|x-a|<\delta$ y $x\in dom(f)$ entonces $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ lo que, por la desigualdad anterior, implica que $\big||f(x)|-|f(a)|\big|<\varepsilon$ y, por tanto, $|f|$ es continua en a.
La función dada por $f(x)=1$ si $x\geqslant 0$ y $f(x)=-1$ si $x<0$, es discontinua en 0 pero $|f|$ es continua en 0.

Ejercicio 6. Sean A,B conjuntos no vacíos de números reales. Supongamos que $a\leqslant b$ para todo $a\in A$ y para todo $b\in B$. Probar que $\sup A\leqslant\inf B$.
Solución. Sea C el conjunto de los mayorantes de A. La hipótesis nos dice que $B\subseteq C$. En consecuencia $\sup(A)=\min(C)$ es un minorante de B y por tanto, $\sup(A)$ será menor o igual que el máximo minorante de B, es decir, $\sup(A)\leqslant\inf(B)$.

Ejercicio 7. Sean A, B, conjuntos no vacíos y acotados de números reales. Definamos:

$$A-B=\{a-b:a\in A,\ b\in B\};\quad AB=\{ab:a\in A,\ b\in B\}$$

Pruébese que $\sup(A-B)=\sup A-\inf B$ y, supuesto que $A\subset\mathbb{R}^+$ y $B\subset\mathbb{R}^+$, probar que $\sup(AB)=\sup A\sup B$.
Solución. Sea $\alpha=\sup(A)$, $\beta=\inf(B)$, $\gamma=\sup(A-B)$. Cualesquiera sean $a\in A, b\in B$ se tiene que $a\leqslant\alpha$, $\beta\leqslant b$. En consecuencia $a-b\leqslant\alpha-\beta$, lo que prueba que $\alpha-\beta$ es un mayorante de $A-B$, y por tanto $\gamma\leqslant\alpha-\beta$.
Probaremos ahora que $\alpha-\beta\leqslant\gamma$. Cualesquiera sean $a\in A, b\in B$ se tiene que $a-b\leqslant\gamma$, es decir, $a\leqslant b+\gamma$. Esta última desigualdad nos dice que, fijado un elemento $b\in B$, el número $b+\gamma$ es un mayorante de A, por lo que $\alpha\leqslant b+\gamma$. Hemos obtenido así que para todo $b\in B$ se verifica que $\alpha-\gamma\leqslant b$, es decir, $\alpha-\gamma$ es un minorante de B, y por tanto $\alpha-\gamma\leqslant\beta$, es decir, $\alpha-\beta\leqslant\gamma$.

Sea $\alpha = \sup(A), \beta = \sup(B), \mu = \sup(AB)$. Cualesquiera sean $a \in A$, $b \in B$ se tiene que $a \leqslant \alpha$, $b \leqslant \beta$. En consecuencia, por ser $a > 0, b > 0$, $ab \leqslant \alpha\beta$, lo que prueba que $\alpha\beta$ es un mayorante de AB y por tanto $\mu \leqslant \alpha\beta$.
Probaremos ahora que $\alpha\beta \leqslant \mu$. Cualesquiera sean $a \in A$, $b \in B$ se tiene que $ab \leqslant \mu$, esto es, $a \leqslant \mu/b$. Esta última desigualdad nos dice que, fijado un elemento $b \in B$, el número μ/b es un mayorante de A, por lo que $\alpha \leqslant \mu/b$. Hemos obtenido así que para todo $b \in B$ se verifica que $b \leqslant \mu/\alpha$, es decir,γ/α es un mayorante de B, y por tanto $\beta \leqslant \mu/\alpha$, es decir, $\alpha\beta \leqslant \mu$.

Ejercicio 8. Estúdiese la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = xE(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$.
Solución. Los ejercicios de este tipo siempre pueden hacerse de varias formas. Una de ellas consiste en usar los resultados que conocemos sobre la continuidad de la suma, producto, cociente y composición de funciones continuas. De esta manera podemos reducir el estudio de la continuidad de la función dada al de otras funciones más sencillas.
En nuestro caso, la función que nos dan es producto de dos funciones, $f(x) = I(x)\varphi(x)$, donde I es la función identidad y $\varphi = E \circ U$ donde E es la función parte entera y $U(x) = 1/x$, $U(0) = 0$ (nótese que como $f(0) = 0$ hay que *definir* $U(0)$ dándole algún valor, no importa cual).
Si $a \neq 0$ es un número real tal que $1/a$ *no* es un número entero, entonces la función U es continua en a, y como E es continua en $U(a)$ (porque la función parte entera es continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$), concluimos que la función compuesta $\varphi = E \circ U$ es continua en a y, como la función identidad es continua en todo punto, deducimos que f también es continua en a.
Nótese que no podemos afirmar *a priori* que f sea discontinua en los puntos de la forma $1/n$ donde $n \neq 0$ es un entero. Ello se debe a que *nada puede decirse en general de la composición de una función continua y otra discontinua: unas veces es continua y otras no*.
Estudiemos qué ocurre en un punto de la forma $1/p$ donde $p \geqslant 2$ es un entero (fijo en lo que sigue). Tenemos que $f(1/p) = 1$. Para todo $x \in]1/(p-1), 1/p[$ se tiene que $p-1 < 1/x < p$, por lo que $E(1/x) = p-1$ y $f(x) = (p-1)x$, y por tanto

$$f(1/p) - f(x) = 1 - (p-1)x > 1 - (p-1)/p = 1/p.$$

En consecuencia, dado $\varepsilon_o = 1/2p$, *cualquiera sea* $\delta > 0$ hay puntos $x \in]1/(p-1), 1/p[$ cuya distancia al punto $1/p$ es menor que δ, para los cuales *no se verifica* que $|f(1/p) - f(x)| < \varepsilon_o$. Concluimos que f es discontinua en $1/p$. De forma parecida se prueba que f es discontinua en los puntos de la forma $1/q$ donde $q \leqslant -2$ es un entero. Igualmente se prueba que f es discontinua en los puntos 1 y -1.
Queda por ver qué pasa en 0. Si dibujamos con paciencia (con lápiz y regla) la gráfica de f obtenemos esto:
Parece que f es continua en 0. Para *probarlo* hay que probar que $|f(x) - f(0)| = |f(x) - 1|$ es tan pequeño como queramos ($< \varepsilon$) siempre que $|x - 0| = |x|$ sea suficientemente pequeño ($< \delta$). Lo usual en estos casos es *trabajar para atrás*. Empezamos *acotando* $f(x) - 1$. Recordemos que

$$E(1/x) \leqslant 1/x \leqslant E(1/x) + 1 \tag{1}$$

Si $x > 0$ podemos multiplicar por x dicha desigualdad para obtener que

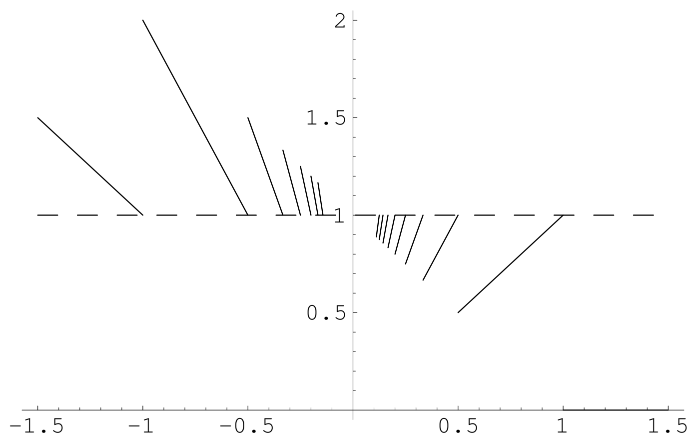
$$xE(1/x) \leqslant 1 \leqslant xE(1/x) + x.$$

Resulta así que para $x > 0$ es:

$$0 \leqslant 1 - xE(1/x) = f(0) - f(x) \leqslant x \tag{2}$$

Si $x < 0$ podemos multiplicar por x la desigualdad (1) para obtener que

$$xE(1/x) \geqslant 1 \geqslant xE(1/x) + x.$$



Resulta así que para $x<0$ es:

$$0 \geqslant 1 - xE(1/x) = f(0) - f(x) \geqslant x \quad \text{es decir} \quad 0 \leqslant f(x) - f(0) \leqslant -x \tag{3}$$

De (2) y (3) deducimos que $|f(x)-f(0)| \leqslant |x|$. En consecuencia, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon$ con lo que, evidentemente, si $|x| < \delta$ entonces $|f(x)-f(0)| < \varepsilon$. Luego f es continua en 0.
Nótese que ni la función parte entera ni la función U antes definida son continuas en cero y ello no impide que f sí lo sea.

El teorema de localización también puede usarse en este tipo de ejercicios. En nuestro caso, es evidente que para $x>1$ es $f(x)=0$ y para $x<-1$ es $f(x)=-x$. Por tanto la *restricción* de f a los intervalos $]1,+\infty[$ y $]-\infty,-1[$ es continua y, como estos intervalos son *abiertos*, deducimos por el teorema de localización que f es continua en dichos intervalos. De forma parecida podemos razonar con un intervalo del tipo $]1/(n+1),1/n[$ donde $n\in\mathbb{N}$ pues, para $x\in]1/(n+1),1/n[$ se tiene que $f(x)=nx$, luego la restricción de f a dicho intervalo es continua y, por tratarse de un intervalo *abierto*, deducimos que f es continua en $]1/(n+1),1/n[$. Análogamente se razona con un intervalo del tipo $]-1/n,-1/(n+1)[$. El teorema de localización no nos dice qué pasa en los puntos extremos de los intervalos considerados, es decir, en los puntos de la forma $1/n$ donde $n\in\mathbb{Z}^*$, y tampoco en 0. Esos puntos requieren, al igual que hicimos antes, un estudio particular.

Ejercicio 9. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Para cada $x\in\mathbb{R}$ definamos la “distancia de x a A” por: $\operatorname{dist}(x,A)=\inf\{|x-a| : a\in A\}$. Pruébese que para todos $x,y\in\mathbb{R}$ se verifica que:

$$|\operatorname{dist}(x,A)-\operatorname{dist}(y,A)| \leqslant |x-y|$$

Dedúzcase que la aplicación $x\mapsto \operatorname{dist}(x,A)$ es continua.
Solución. Teniendo en cuenta que $|a|\leqslant b$ equivale a que $a\leqslant b$ y $-a\leqslant b$, la desigualdad que nos piden probar equivale a estas dos desigualdades:

$$\operatorname{dist}(x,A)-\operatorname{dist}(y,A) \leqslant |x-y| \quad \text{y} \quad \operatorname{dist}(y,A)-\operatorname{dist}(x,A) \leqslant |x-y| \tag{4}$$

Pero es claro que basta con probar una sola de ellas pues entonces cambiando x por y obtenemos la otra (porque $|x-y| = |y-x|$). Probaremos la primera de las dos desigualdades (4). Escribamos la desigualdad en la forma:

$$\operatorname{dist}(x,A) \leqslant |x-y| + \operatorname{dist}(y,A)$$

En todo lo que sigue x e y están fijos. Tenemos que para todo $a \in A$:

$$\operatorname{dist}(x,A) \leqslant |x-a| \leqslant |x-y| + |y-a|$$

es decir,

$$\operatorname{dist}(x,A) - |x-y| \leqslant |y-a| \quad \text{para todo} \quad a \in A$$

Deducimos que el número $\operatorname{dist}(x,A) - |x-y|$ es un minorante del conjunto $\{|y-a| : a \in A\}$, y por tanto será menor o igual que el máximo minorante de dicho conjunto, que es por definición $\operatorname{dist}(y,A)$. Hemos probado así que

$$\operatorname{dist}(x,A) - |x-y| \leqslant \operatorname{dist}(y,A)$$

Que es la desigualdad que queríamos probar.

Es evidente, teniendo en cuenta la desigualdad que acabamos de probar, que la función $\varphi(x) = \operatorname{dist}(x,A)$ es continua, pues dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon$ con lo que, evidentemente, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant |x-y| < \varepsilon$ siempre que $|x-y| < \delta$. Nótese que, aquí un mismo "δ" vale para todo punto.

Ejercicio 10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, mayorada y tal que para todos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se verifica que $\sup f(]a,b[) = \sup f(\mathbb{R})$. Pruébese que f es constante.
Solución. Llamemos $\beta = \sup f(\mathbb{R})$. Es claro que $f(x) \leqslant \beta$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Y, si f es constante deberá darse la igualdad $f(x) = \beta$ en todo punto x de $\mathbb{R}$. Luego tenemos que probar que, dado $a \in \mathbb{R}$, es imposible que ocurra $f(a) < \beta$. Pero eso es claro, pues si fuera $f(a) < \beta$, entonces tomando $\lambda \in]f(a), \beta[$, por el teorema de conservación del signo aplicado a la función $g(x) = \lambda - f(x)$ en el punto a, deducimos que existe un intervalo abierto $]u,v[$ que contiene al punto a y tal que para todo $x \in]u,v[$ es $g(x) > 0$, es decir, $f(x) < \lambda$. Pero entonces $\sup f(]u,v[) \leqslant \lambda < \beta$ en contradicción con la hipótesis hecha.

Ejercicio 11. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) < 0$, $f(b) < 0$ y $f(c) > 0$ para algún $c \in]a,b[$. Pruébese que hay dos números u, v tales que $a < u < v < b$, $f(u) = f(v) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in]u,v[$.
Solución. Hay varias formas de hacer este ejercicio. Por ejemplo, podemos definir

$$u = \sup\{x \in]a,c[: f(x) = 0\}, \quad v = \inf\{x \in]c,b[: f(x) = 0\}$$

Con ello es fácil probar que $a < u < c < v < b$ y $f(u) = f(v) = 0$ pero f no puede anularse entre u y v, por lo que, al ser $f(c) > 0$, concluimos que $f(x) > 0$ para todo $x \in]u,v[$.

Vamos a ver ahora una propiedad interesante de las funciones continuas cuyas consecuencias son con frecuencia llamativas.

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Llamemos al número $f(b)-f(a)$ el *incremento* de f en $[a,b]$. Dado un número natural $n \geqslant 2$, nos preguntamos si hay algún intervalo de longitud $(b-a)/n$ en el cual el incremento de f sea igual a $(f(b)-f(a))/n$. Para ello dividimos el intervalo $[a,b]$ en n intervalos de longitud igual a $(b-a)/n$. Estos intervalos son de la forma $[x_k, x_{k+1}]$, donde $x_k = a + k(b-a)/n$, $k = 0,1,\ldots,n-1$. Es claro que la suma de los incrementos de f en cada uno de los n intervalos $[x_k, x_{k+1}]$ es igual al incremento de f en el intervalo $[a,b]$. Es decir:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(b) - f(a).$$

Como en esta suma hay n sumando en total, deducimos que *o bien todos ellos son igual* a $(f(b)-f(a))/n$ o bien alguno de ellos es mayor que $(f(b)-f(a))/n$ en cuyo caso tiene que haber necesariamente otro que sea menor que $(f(b)-f(a))/n$.

Definamos la función $g\colon [a, b-(b-a)/n] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x+(b-a)/n) - f(x)$. Nótese que $g(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$. Según acabamos de ver:

- O bien para todo $k = 0,1,\ldots,n-1$ es $g(x_k) = \dfrac{f(b)-f(a)}{n}$, en cuyo caso se verifica que $f(x_{k+1}) - f(x_k) = \dfrac{f(b)-f(a)}{n}$,
- O bien hay puntos x_p, x_q tales que $g(x_p) < (f(b)-f(a))/n < g(x_q)$, en cuyo caso, como la función g es continua, el teorema de los ceros de Bolzano implica que tiene que haber algún punto t_o comprendido entre x_p y x_q tal que $g(t_o) = (f(b)-f(a))/n$, es decir se verifica que $f(t_o + (b-a)/n) - f(t_o) = (f(b)-f(a))/n$.

Hemos probado así que hay un intervalo de longitud $(b-a)/n$ en el cual el incremento de f es igual a $(f(b)-f(a))/n$.

Ejercicio 12. Un reloj averiado marca inicialmente un tiempo t_0. El reloj puede adelantar o atrasar, pero cuenta con exactitud períodos de 12 horas, es decir, pasadas 12 horas el reloj marca un tiempo $t_0 + 12$ horas. Demuéstrese que en algún momento dicho reloj mide con exactitud una hora.
Solución. Sea $f\colon [0,12] \to \mathbb{R}$ la función definida por: $f(t) =$ tiempo (medido en horas) que marca el reloj en el tiempo t. Podemos admitir que f es continua. El incremento de f en el intervalo $[0,12]$ es igual a $f(12) - f(0) = 12$. Deducimos, por lo antes visto que, para cada $n \geqslant 2$, hay algún intervalo de longitud $(12-0)/n$ en el cual el incremento de f es igual a $(f(12)-f(0))/n$. Es decir, que en algún instante c_o el reloj mide con exactitud un período de tiempo igual a $\frac{12}{n}$ horas: $f(c_o + 12/n) - f(c_o) = 12/n$. Tomando $n = 12$ obtenemos la solución del ejercicio.

Ejercicio 13. Un automovilista sale de Granada hacia Madrid un sábado a las 8h de la mañana y el domingo inicia el regreso a la misma hora. Sabiendo que invirtió igual tiempo en ambos viajes, pruébese que en algún momento del domingo el automovilista se encuentra a igual distancia de Granada que a la que se encontraba el sábado en ese mismo momento.
Solución.
Supongamos que el automovilista tarda 4 horas en llegar a Madrid. Llamando $f\colon [8,12] \to \mathbb{R}$ la función que en el tiempo t (medido horas) nos da la distancia $f(t)$ (medida en kilómetros) que el automovilista ha recorrido el sábado, y $g\colon [8,12] \to \mathbb{R}$ a la función que en el tiempo t (medido horas) nos da la distancia $g(t)$ (medida en kilómetros) que el automovilista ha recorrido el domingo; tenemos que $f(8) = g(8) = 0$, $f(12) = g(12) = \alpha =$ distancia de Granada a Madrid.

Como las funciones f y g son continuas, la función $h(t) = f(t) - (\alpha - g(t))$ también es continua. Como $h(8) = -\alpha < 0$, $h(12) = \alpha > 0$, deducimos que $h(t_o) = 0$ para algún $t_o \in [8, 12]$, es decir $f(t_o) = \alpha - g(t_o)$. Por tanto, el sábado y el domingo, en el instante t_o el automovilista se encuentra a la misma distancia de Granada.
Si dibujas las gráficas de f y de g verás que este resultado es *evidente*.

Ejercicio 14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y decreciente. Pruébese que hay un único punto $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = a$.
Solución.
Naturalmente, se trata de probar que la función $g(x) = x - f(x)$ se anula en algún punto. Como es continua (porque nos dicen que f lo es) y está definida en un intervalo, intentaremos aplicar el teorema de Bolzano. Tomemos un punto $c \in \mathbb{R}$. Si $f(c) = c$ hemos acabado. En otro caso será $f(c) \neq c$. Supongamos que $f(c) < c$. Entonces, como f es decreciente, será $f(f(c)) \geqslant f(c)$. Si $f(f(c)) = f(c)$, hemos acabado. En otro caso será $f(f(c)) > f(c)$. Pero en este caso obtenemos que $g(c) > 0$ y $g(f(c)) < 0$ por lo que el teorema de Bolzano garantiza que g tiene que anularse en algún punto. Se razona de forma análoga si suponemos que $c < f(c)$.